Review Bilangan Kompleks

Oleh : Syah Alam, MT

SISTEM BILANGAN KOMPLEKS

1.1. DEFINISI

- Bilangan kompleks adalah bilangan yang besaran (skalarnya) tidak terukur secara menyeluruh.
- Bilangan kompleks terdiri dari 2 komponen :
  - Komponen bilangan nyata (riel) ; terukur
  - Komponen bilangan khayal (imajiner) ; tak terukur
- Bilangan kompleks merupakan fasor(vektor yang arahnya ditentukan oleh sudut fasa)

BENTUK BILANGAN KOMPLEKS

- Bilangan kompleks dapat diekspresikan dalam 4 bentuk :
  - Bentuk Rektangular
  - Bentuk Polar
  - Bentuk Trigonimetri
  - Bentuk Eksponensial
  - Bentuk Hiperbolik
  - Bentuk Logaritma

BILANGAN IMAJINER

- Bilangan bertanda positip di bawah tanda akar disebut bilangan irasional.

  Contoh : $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, dst
- Bilangan (positip atau negatip) bila dikuadratkan hasilnya akan selalu positip.

  Contoh : $(3)^2 = 9$; $(-4)^2 = 16$; $(-5)^2 = 25$ dst.

- Bilangan bertanda negatif di bawah tanda akar disebut bilangan imjiner.

  Contoh : $\sqrt{(-6)}$; $\sqrt{(-9)}$; $\sqrt{(-12)}$; $\sqrt{(-16)}$ dst

- Bilangan imajiner

$$\sqrt{(-9)} = [\sqrt{(-1)}]\ \sqrt{(9)} = [\sqrt{(-1)}]\ 3$$

$$\sqrt{(-5)} = [\sqrt{(-1)}]\ \sqrt{(5)} = [\sqrt{(-1)}]\ 2.2361$$

Bila $\sqrt{(-1)} = i$ atau $\sqrt{(-1)} = j$

maka $\sqrt{(-9)} = = i3$ atau $\sqrt{(-9)} = j3$

BILANGAN IMAJINER

- i atau j disebut operator

- Sehingga $i^2 = [\sqrt{(-1)}].[\sqrt{(-1)}] = -1$

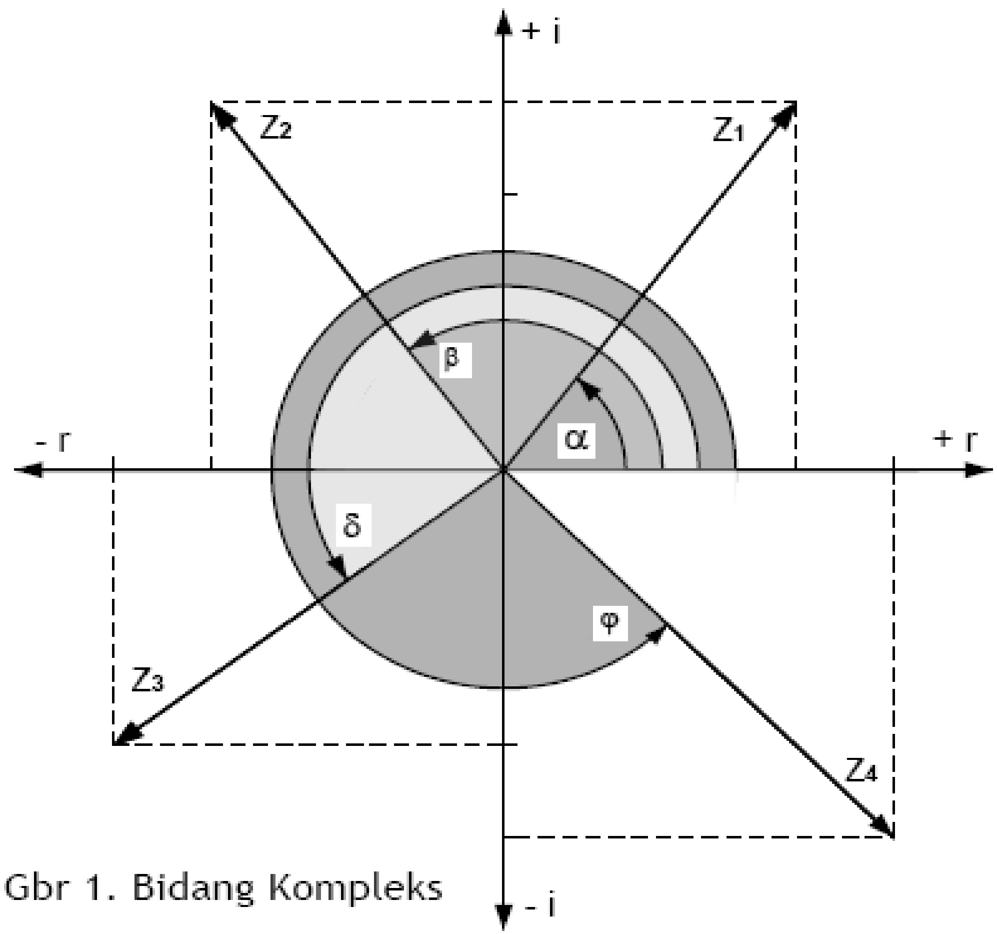
  $i^3 = (i^2).\ i = [\sqrt{(-1)}]^2 .\ i = -i$

  $i^4 = (i^2)\ ^2 = (-1)^2 = 1$

  $i^5 = (i^4)\ .\ i = i$

BILANGAN KOMPLEKS

Bentuk Rektangular



Gbr 1. Bidang Kompleks

- Bentuk Umum

$$Z = R + iX \qquad (1\text{-}1)$$

R = Re(Z) = Komponen Bilangan Riel (Nyata)
X = Im(Z) = Komponen Bilangan Khayal (Imajiner)

- Contoh :

1. $Z_1 = 3 + i4$; $Re(Z_1) = 3$; $Im(Z_1) = 4$
2. $Z_2 = -3 + i4$; $Re(Z_2) = -3$; $Im(Z_2) = 4$
3. $Z_3 = -4 - i3$; $Re(Z_3) = -4$; $Im(Z_3) = -3$
4. $Z_4 = 4 - i4$; $Re(Z_4) = 4$; $Im(Z_4) = -4$

- Harga besaran (skalar) Z :

$$\check{Z} = |Z| = \sqrt{(R^2 + X^2)} \qquad (1\text{-}2)$$

Ž disebut harga mutlak (absolut) atau disebut juga modulus Z, ditulis |Z|.

- Sudut arah diukur terhadap sumbu X positif dan disebut sebagai argumen Z.

$$\begin{aligned} \text{Arg } Z = \theta &= \text{Arc tan } (X/R) \\ &= \text{Arc sin } (R/Z) \qquad (1\text{-}3) \\ &= \text{Arc cos } (X/Z) \end{aligned}$$

Contoh :

1. $Z_1 = 3 + i4$
2. $Z_2 = -3 + i4$
3. $Z_3 = -4 - i3$
4. $Z_4 = 4 - i4$

1.3.2. Bentuk Polar

► Lihat persamaan-persamaan :

(1-1) : $Z = R + iX$

(1-2) : $\check{Z} = |Z| = \sqrt{(R^2 + X^2)}$

(1-3) : $\text{Arg } Z = \theta$

$\theta = \text{Arc tan } (X/R)$

$\theta = \text{Arc sin } (R/Z)$

$\theta = \text{Arc cos } (X/Z)$

► Bentuk Umum Bilangan Kompleks dalam bentuk Polar :

$$Z = \check{Z} \angle \theta \qquad (1\text{-}4)$$

► Contoh :

1. $Z_1 = 3 + i4$; $\check{Z}_1 = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$

   $\alpha = \text{Arc tan } (4/3) = 53.13^\circ$

   $Z_1 = 5 \angle 53.13^\circ$

2. $Z_2 = -3 + i4$; $\check{Z}_2 = \sqrt{[(-3)^2 + 4^2]} = 5$

   $\beta = \text{Arc tan } (4/-3) = -53.13^\circ = 126.87^\circ$

   $Z_2 = 5 \angle -53.13^\circ$; $Z_2 = 5 \angle 126.87^\circ$

3. $Z_3 = -4 - i3$; $\check{Z}_3 = \sqrt{[(-4)^2 + (-3)^2]} = 5$

   $\delta = \text{Arc tan } (-3/-4) = 216.87^\circ$

   $Z_3 = 5 \angle 216.87^\circ$

4. $Z_4 = 4 - i4$; $\check{Z}_4 = \sqrt{(4^2 + (-4)^2)} = 5.66$

   $\varphi = \text{Arc tan } (4/-4) = -45^\circ = 315^\circ$

   $Z_4 = 5 \angle -45^\circ$; $Z_4 = 5 \angle 315^\circ$

5. $Z_5 = -i4$; $\check{Z}_5 = \sqrt{(-7^2)} = 7$

   $\theta = \text{Arc tan } (-7/0) = -90^\circ = 270^\circ$

   $Z_5 = 7 \angle -90^\circ$; $Z_5 = 7 \angle 270^\circ$

6. $Z_6 = 9$; $\check{Z}_6 = \sqrt{(9^2)} = 9$

   $\theta = \text{Arc tan } (0/9) = 0^\circ$

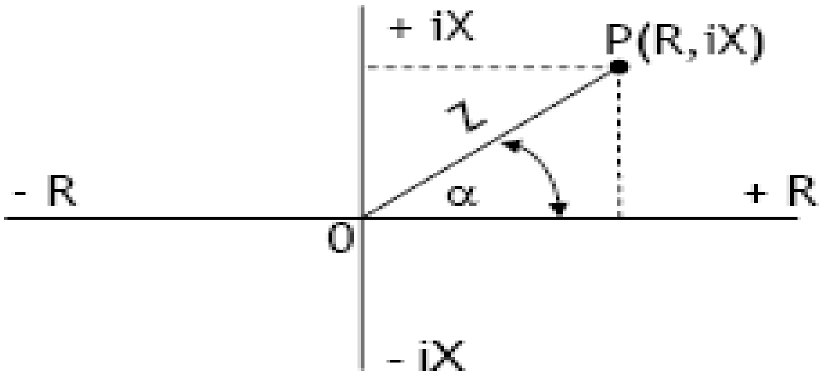
   $Z_6 = 9 \angle 0^\circ$

► Catatan :

$i = 90^\circ$; $i^2 = 180^\circ = -90^\circ$; $i^3 = 270 = -90^\circ$

$i^4 = 1 = 360^\circ = 0^\circ$; $i^n = n \times 90^\circ$

Bentuk Trigonometri



Gbr 2. Bidang compels utk bentuk trigonometri

Bila $Z = R + iX$ (lihat pers 1-1), maka :

$R = ž \cos \alpha$ dan $X = ž \sin \alpha$

Sehingga : $Z = ž \cos \alpha + i\, ž \sin \alpha$

$$Z = \check{Z} (\cos \theta + i \sin \theta) \qquad (1\text{-}5)$$

- Contoh

1. $Z_1 = 3 + i4$; $\check{Z}_1 = 5$; $\alpha = 53.13^o$

   $Z_1 = 5 \angle 53.13^o$

   $Z_1 = 5 (\cos 53.13^o + i \sin 53.13^o)$

2. $Z_2 = -3 + i4$; $\check{Z}_2 = 5$; $\beta = -53.13^o = 126.87^o$

   $Z_2 = 5 \angle -53.13^o$; $Z_2 = 5 \angle 126.87^o$

   $Z_2 = 5 (\cos -53.13^o + i \sin -53.13^o)$

   $Z_2 = 5 (\cos 128.87^o + i \sin 128.87^o)$

3. $Z_3 = -4 - i3$; $\check{Z}_3 = 5$; $\delta = 216.87^o$

   $Z_3 = 5 \angle 216.87^o$

   $Z_3 = 5 (\cos 216.87^o + i \sin 216.87^o)$

4. $Z_4 = 4 - i4$; $\check{Z}_4 = 5.66$; $\varphi = -45^o = 315^o$

   $Z_4 = 5.66 \angle -45^o$

   $Z_4 = 5.66 (\cos -45^o - i \sin -45^o)$

Bentuk Eksponensial

Bentuk fungsi eksponensial sejati :

$$(e^{x})^{1} = e^{x}$$

$$e^{(x1+x2)} = e^{x1}.e^{x2}$$

dan bila $e^{(x + i R)} = e^{x}.e^{iR}$

Menurut Deret MacLaurin :

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \dots\dots\dots \qquad (1\text{-}6)$$

bila Z = R + iX dapat dituliskan dalam bentuk :

$$e^{Z} = e^{R} (\cos X + i \sin X) \qquad (1\text{-}7)$$

- Didefinisikan sebagai fungsi positif

Menurut Rumus Euler (perhatikan pers. 1-7) :

$$e^{iX} = \cos x + i \sin x \qquad (1\text{-}8)$$

- Didefinisikan sebagai fungsi imajiner

Sehingga bentuk bilangan kompleks :

$Z = R + i X = \check{Z} (\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\boxed{Z = \check{Z}\, e^{i\theta}} \qquad (1\text{-}9)$$

Karena $| e^{iX} | = \sqrt{(\cos^2 X + \sin^2 X)} = 1$

► Contoh

1. $Z_1 = 3 + i4$; $\check{Z}_1 = 5$; $\alpha = 53.13^o$

   $Z_1 = 5 \angle 53.13^o$

   $Z_1 = 5 (\cos 53.13^o + i \sin 53.13^o)$

   $Z_1 = 5 e^{i\ 53.13o}$

2. $Z_2 = -3 + i4$; $\check{Z}_2 = 5$; $\beta = -53.13^o$

   $Z_2 = 5 \angle -53.13^o$

   $Z_2 = [5 (\cos -53.13^o + i \sin -53.13^o)]$

   $Z_2 = 5 e^{i\ -53.13o}$

3. $Z_3 = -4 - i3$; $\check{Z}_3 = 5$;

   $\delta = 36.87^o$ (kuadran 3) ; $\delta = 216.87^o$

   $Z_3 = 5 \angle 216.87^o$

   $Z_3 = 5 (\cos 216.87^o + i \sin 216.87^o)$

   $Z_3 = 5 e^{i\ 216.87o}$

4. $Z_4 = 4 - i4$; $\check{Z}_4 = 5.66$; $\varphi = -45^o = 315^o$

   $Z_4 = 5 \angle -45^o$; $Z_4 = 5 \angle 315^o$

   $Z_4 = 5 (\cos 315^o + i \sin 315^o$

   $Z_4 = 5 e^{i\ 315o}$

OPERASI ARITMATIK

Penjumlahan/Pengurangan

- Bentuk Umum

$$\Sigma Z_i = \Sigma \, Re(Z_i) \pm i.\Sigma \, Im(Z_i) \qquad (1\text{-}18)$$

- Bila $Z_1 = a + ib$; $Z_2 = m + in$ dan $Z = X \pm Y$
  maka $Z = Z_1 \pm Z_2 = (a + ib) \pm (m + in)$
  $= (a + m) \pm i(b + n)$

- Contoh
  1. $Z_1 + Z_2$ bila $Z_1 = 4 + i6$; $Z_2 = -8 - i3$

  Jawab :

  $Z_3 = Z_1 + Z_2 = (4 + i6)+(-8 -i3) = (4-8) + i(6-3)$
  $= -4 + i3 = 5 \angle 143.13^o = 5 \angle -36.87^o$
  $= 5 (\cos 143.13^o + i \sin 143.13^o)$
  $= 5 [\cos (-36.87 \} + i \sin(-36.87)]$
  $= 5 e^{i143.13o} = 5 e^{i-36.87o}$

  Cara lain

  $Z_1 = 4 + i6$
  $Z_2 = -8 - i3$
  ______________________________ +
  $Z_3 = Z_1 + Z_2 = -4 + i3$

2. Hitung $Z_1 + Z_2$, bila $Z_1 = 6.403e^{i38.66o}$ dan $Z_2 = 6.708e^{i-63.43o}$

Jawab :

$Z_1 = 6.403e^{i38.66o} = 6.403 \angle 38.66^o$

$Z_1 = 6.403$ (cos 38.66^o + i sin 38.66^o)

$Z_1 = 5 + i4$

$Z_2 = 6.708\ e^{i-63.43o} = 6.708 \angle -63.43^o$

$Z_2 = 6.708$ (cos -63.43^o + i sin -63.43^o)

$Z_2 = 3 - i6$

$Z_1 + Z_2 = (5+3) + i(4-6) = 8 - i2$

Catatan

Operasi penjumlahan/pengurangan bilangan kompleks lebih mudah bila persamaan dalam bentuk rektangular.

Perkalian

A. Perkalian Bentuk Rektangular

$X = a + ib \qquad Y = p + iq$

$X.Y = (a+ib)(p+iq) = ap + iaq + ibp - bq$

$$X.Y = (ap-bq)+ i(aq+bp)$$

B. Perkalian Bentuk Polar

$X = \hat{X} \angle \beta \quad ; Y = \hat{Y} \angle \varphi$

$$X.Y = (\hat{X}.\hat{Y}) \angle (\beta + \varphi)$$

C. Perkalian Bentuk Eksponensial

$X = \hat{X} e^{i\beta} \quad ; \quad Y = \hat{Y} e^{i\varphi}$

$$X.Y = (\hat{X} \hat{Y}) e^{i(\beta + \varphi)}$$

Perkalian Bentuk Trigonometri

$$X = \hat{X}\ (\cos\ \beta + i \sin\ \beta\ )$$
$$Y = \hat{Y}\ (\cos\ \varphi + i \sin \varphi\ )$$

$$X.Y = [\ \hat{X}(\cos \beta + i \sin \beta)]\ [\ \hat{Y}\ (\cos \varphi + i \sin \varphi)]$$

Contoh

1. Hitung $Z_1 \times Z_2$

   bila $Z_1 = 5 + i4$; $Z_2 = 3 - i6$

   Jawab

   $Z_1 \times Z_2 = (5 + i4)(3 - i6)$
   $= (\ 5.3 + 3.\ i4 - 5.\ i6 +\ i4\ .\ -i6\ )$
   $= (15 + 24) + i(12-30) = 39 - i18$

2. Hitung $Z_1 \times Z_2$, bila

   $Z_1 = 6.403\ (\ \cos 38.66^o + i \sin 38.66^o\ )$
   $Z_2 = 6.708\ (\ \cos -63.43^o + i \sin -63.43^o\ )$

   Jawab :

   $Z_1 = 6.403e^{i38.66o}$ $= 6.403 \angle 38.66^o$
   $Z_2 = 6.708\ e^{i-63.43o}$ $= 6.708 \angle -63.43^o$

Perkalian Bentuk Trigonometri

$$Z_1 \times Z_2 = 6.403e^{i38.66o}\ \ 6.708\ e^{i-63.43o}$$
$$= (6.403 \times 6.708)\ e^{i(38.66-63.43)}$$
$$= 42.953\ e^{i(-24.78)} \quad \text{atau}$$
$$= 42.953\ (\cos -24.78^o + i \sin 24.78^o)$$
$$Z_1 \times Z_2 = 39 - i18 \quad ;\ \theta = -24.78^o$$

$$Z_1 \times Z_2 = (6.403)(6.708) \angle (38.66^o - 63.43^o)$$
$$= 42.953 \angle -24.78^o$$
$$= 42.953\ (\cos -24.78^o + i \sin -24.78^o)$$
$$= 39 - i18$$

Catatan :

Operasi perkalian lebih mudah dilakukan dalam bentuk polar atau eksponensial.

Pembagian

A. Pembagian Bentuk Rektangular

$X = a + ib \qquad Y = p + iq$

$X/Y = (a+ib)/(p+iq)$

$X/Y = [(a+ib)/(p+iq] \, [(p-iq)/(p-iq)]$

$= [(a+ib)(p-iq)]/[(p+iq)(p-iq)]$

$= [(a+ib)(p-iq)]/ (p^2+q^2)$

$$X/Y = [(ap-bq)+i(bp-aq)]/(p^2+q^2)$$

Pembagian Bentuk Polar dan Eksponensial

$Z_1 = \check{Z}_1 \angle \beta$ dan $Z_2 = \check{Z}_2 \angle \varphi$

$$Z_1 / Z_2 = (\check{Z}_1 / \check{Z}_2) \angle (\beta - \varphi)$$

$Z_1 = \check{Z}_1 e^{i\beta}$ dan $Z_2 = \check{Z}_2 e^{i\varphi}$

$$Z_1 / Z_2 = (\check{Z}_1 / \check{Z}_2) e^{i(\beta-\varphi)}$$

Contoh

1. Hitung Z_1/Z_2 bila $Z_1 = 5 + i4$; $Z_2 = 3 - i6$

   Jawab :

   $$\begin{aligned} Z_1/Z_2 &= (5+i4)/(3-i6) \\ &= [(5+i4)/(3-i6)][(3+i6)/(3+i6)] \\ &= [(5+i4)(3+i6)]/(3^2+6^2) \\ &= [(15-24)+i(12+24)]/(9+36) \\ &= -0.2 + i0.933 \end{aligned}$$

2. Hitung Z_1/Z_2 bila

Polar $Z_1 = 6.403 \angle 38,66^o$ dan

$Z_2 = 6.708 \angle -63.43^o$

Eksponensial $Z_1 = 6.403\ e^{i38,66o}$

$Z_2 = 6.708\ e^{i-63.43o}$

Jawab :

$Z_1/Z_2 = (6.403/6.708)\angle[38,66^o - (-63.43^o)]$

$Z_1/Z_2 = (0.955)\ \angle 102.10^o$

$Z_1/Z_2 = (6.403/6.708)e^{i[38,66o - (-63.43o)]}$

$Z_1/Z_2 = (0.955)\ e^{i102.10o}$

Catatan :

Operasi pembagian lebih mudah bila dilakukan dalam bentuk polar atau eksponensial.

Sifat Utama Dalam Operasi Aritmatik

1. **Komutatif**

   $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

   $Z_1.Z_2 = Z_2.Z_1$

2. **Asosiatif**

   $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$

   $(Z_1 \,.\, Z_2)\, Z_3 = Z_1\, (\, Z_2 \,.\, Z_3)$

3. **Distributif**

   $Z_1\, (Z_2 + Z_3) = Z_1Z_2 + Z_1Z_3$

   $0 + Z = Z + 0 = Z$

   $Z+(-Z) = (-Z) + Z = 0$

   $Z.1 = Z$

KONJUGASI

Pengertian Dasar

- Konjugasi adalah bayangan cermin bilangan nyata (riel) dalam sistem bilanganh kompleks.
- Tanda pada komponen imajiner berubah (berlawanan).
- Konjugasi dituliskan dengan tanda “ * “

Cara Penulisan

Bentuk	Konjugasi
1. Rektanguler	
$Z = R + iX$	$Z^* = R - iX$
2. Polar	
$Z = \check{Z} \angle \beta$	$Z^* = \check{Z} \angle -\beta$
3. Trigonometri	
$Z = \check{Z}(\cos \beta + i \sin \beta)$	$Z^* = \check{Z}(\cos \beta - i\sin\beta)$
4. Eksponensial	
$Z = \check{Z}\ e^{i\beta}$	$Z^* = \check{Z}\ e^{-i\beta}$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. $(R + iX)^4 + (R-iX)^4$
2. $(1-i\sqrt{3})^5 + ((-3 + i3)^4$
3. $5(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ) + 4(\cos 78^\circ + i \sin 78^\circ)$
4. $12(\cos 138^\circ + i \sin 138^\circ) - 6(\cos 93^\circ + i \sin 93^\circ)$
5. $3(\cos 38^\circ + i \sin 38^\circ) \times 4(\cos 82^\circ - i \sin 82^\circ)$
6. $4(\cos 69^\circ - i \sin 69^\circ) \times 5(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$
7. $12(\cos 138^\circ + i \sin 138^\circ)/4(\cos 69^\circ - i \sin 69^\circ)$
8. $6(\cos 93^\circ - i \sin 93^\circ)/ 3(\cos 38^\circ + i \sin 38^\circ)$
9. Bila $Z_1 = 12(\cos 125 + i \sin 125)$; $Z_2 = (3 - i\sqrt{5})^3$

   Hitung :

   a. $Z_1^* + Z_1 Z_2^*$, b. $2Z_1^* \times Z_2^*$, c. $Z_1^* \times (Z_2^*)^2$
10. Soal sama dengan No. 9, tetapi

    Hitung :

    a. Z_1^*/ Z_2^* , b. $2Z_1^* / Z_2^*$, c. $(Z_2^*)^2/ 2Z_1^*$
11. Carilah solusi kompleks dari fungsi-fungsi berikut :

    a. $\cos z = 5$, b. $\sin Z = 1000$, c. $\cosh Z = 0$

    d. $\sinh Z = 0$, e. $\cosh Z = 0.5$, f. $\sin Z = i \sinh 1$

TERIMA KASIH