PENERAPAN FUNGSI LAGRANGE DALAM EONOMI (SOAL 1)

FUNGSI PRODUKSI

Produksi adalah kegiatan untuk menghasilkan produk (barang atau jasa) untuk menghasilkan produk diperlukan faktor – faktor produksi (masukan atau input) yang meliputi : bahan baku, tenaga kerja (Labour), Mesin dan Modal (Kapital). Jadi fungsi produksi ==➔ Produksi (P) = f (BB, L, M, K) bila factor produksi hanya hanya dibatasi 2 unsur maka P = f (L, K)
Fungsi Produksi =➔ Tujuan Perusahaan yaitu menekan biaya produksi (meminimalkan biaya produksi). Untuk mencapai fungsi tujuan tersebut tidak mudah (banyak kendalanya) seperti : Modal atau capital yang terbatas, biaya bahan baku dan tenaga kerja semakin lama semakin meningkat . Semua itu harus diatasi yaitu dengan membuat fungsi baru yaitu fungsi langrange.

Contoh soal :
Seorang produsen mencadangkan Rp 96,- untuk membeli masuk K dan masuka L, harga perunit masukan K = Rp 4 dan masukan L = Rp 3, fungsi produksi = 12 KL.
Pertanyaan :

a. Berapa unit masing – masing masukan yang sebenarnya digunakan agar produksinya optimum ?
b. Berapa unit keluaran yang dihasilkan dari konsumsi tersebut ?
c. Buktikan tingkat produksi optimum berlaku ?

$$\frac{MPk}{Pk} = \frac{MPl}{Pl}$$

Jawab :
Diketahui
FT = 12KL,
FK ==➔ Pk.K + Pl. L = 96 ==➔ 4 K + 3 L = 96 ==➔ 4 K + 3 L – 96

Tahap – Tahap mencari nilai fungsi tujuan

1. Membuat persamaan Fungsi Langrange

FL = FT + λ FK
= 12KL + λ (4 K + 3 L – 96)
= 12KL + 4Kλ + 3Lλ – 96

2. **Menentukan syarat optimum (mencari persamaan K dan L)**

Syarat optimum :

- Fk = 0
  = 12L + 4λ

4λ = - 12L
λ = - 12L/4
= -3L
λk = -3L

- Fl = 0
  = 12K + 3λ

3λ = - 12K
λ = - 12K/3
= -4K
λl = -4K

- λk = λl

-3L = -4K
L = 4/3 K
K = 3/4 L

3. Mencari Nilai Fungsi Kendala

- 4 K + 3 L = 96
  4 **(3/4 L) + 3L = 96**
  3L + 3L = 96
  6L = 96
  L = 96/6
  L = 16

- 4 K + 3 (**16**) = 96
  4K + 48 = 96
  4K = 96 -48
  4K = 48
  K = 48/4
  K = 12

4. Mencari Nilai Fungsi Fungsi Tujuan

FT = 12KL
= 12 (12) (16)
= 2.304

Jadi produksi yang dihasilkan dengan kombinasi K = 12 dan L = 16 dengan produksi optimum = 2.304

5. Pembuktian Tingkat produksi optimum

$$\frac{MPk}{Pk} = \frac{MPl}{Pl}$$

MPk = 12L
= 12(16)
=192
MPk = 12K
= 12(12)
= 144

$$\frac{192}{4} = \frac{144}{3}$$

48 = 48 (Terbukti)

PROGRAM LINER (SOAL 2)
Masalah Maksimisasi

Sebuah perusahaan menghasilkan dua macam keluaran (output) yaitu barang A dan B dimana untuk menghasilkan barang barang tersebut tersebut menggunakan dua macam bahan mentah yakni R dan S dalam proses prouksinya. Setiap unit keluaran A memerlukan 4 unit masukan R dan 3 unit masukan S, sedangkan setiap unit B memerlukan masukan 2 unit R dan 4 unit S. Jumlah persediaan masukan R dan S yang dimiliki perusahaan masing-masing tidak melebihi 100 unit untuk barang A dan 120 unit untuk B. Harga jual produk produk A dan B masing-masing Rp 5.000 dan Rp 6.000 perunit.

Pertanyaan :

1. Berapa unit barang A dan B harus dihasilkan agar penerimaan perusahaan maksimum ?
2. Berapa penerimaan maksimum tersebut ?

Jawab :
Langkah-langkahnya :
1. Membuat table permasalahan :

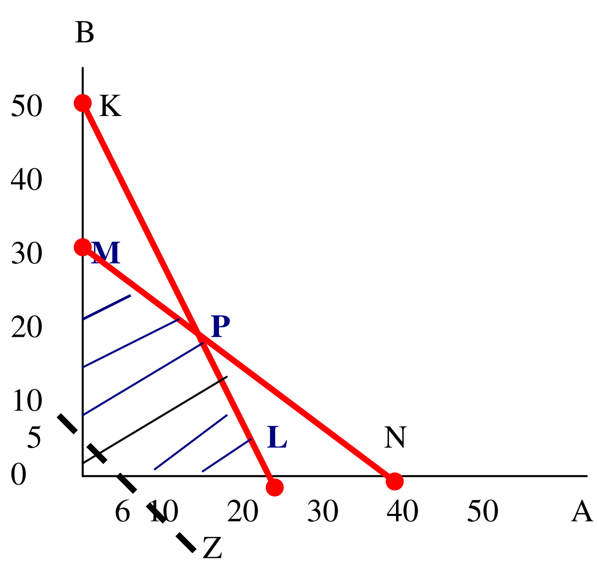
Keterangan		**Keluaran (Output)**		**Kendala Masukan (Input)**
		A	B	
Masukan (Input)	R	4	2	100
	S	3	4	120
Kendala Keluaran (Output)		5.000	6.000	

Fungsi Tujuan : Z = 5.000A + 6.000B
Fungsi Kendala : I. $4A + 2B \leq 100$
II. $3A + 4B \leq 120$
III. $A,B \geq 0$

2. Menggambar fungsi kendala dalam suatu grafik untuk menentukan feasible area

I. $4A + 2B \leq 100$
Bila A = 0 maka 2B = 100
B = 50 ⟶ K (0,50)
Bila B = 0 maka 4A = 100
A = 25 ⟶ L (25,0)

II. $3A + 4B \leq 120$
Bila A = 0 maka 4B = 120
B = 30 ⟶ M (0,30)
Bila B = 0 maka 3A = 120
A = 40 ⟶ N (40,0)



Jadi feasible area pada titik **M, P** dan **L** (titik optimal)

3. Menggambarkan fungsi tujuan untuk mencari titik optimal yang tepat
a). Mencari fungsi tujuan secara sembarangan
Z = 5.000A + 6.000B
Bila A = 6 maka B = 0, Jadi Z = 5.000 (6) + 6.000(0) = 30.000
Bila B = 5 maka A = 0, Jadi Z = 5.000 (0) + 6.000(5) = 30.000
(Kedua Z nilainya harus sama yaitu 30.000)
Jadi A = 6 untuk sumbu X dan Jadi B = 5 untuk sumbu Y

b). Mencari fungsi tujuan dengan fungsi tangen

Z = 5.000A + 6.000B
Jika Z = 0 maka
0 = 5.000A + 6.000B
6.000B = - 5.000A

$$B = -\frac{5.000}{6.000} A$$

$$B = -\frac{5}{6} A$$

Jadi 5 untuk sumbu B atau Sumbu Y
Sedangkan 6 untuk sumbu A atau Sumbu X

4. Mencari titik optimal dengan cara :

a. Melakukan pergeseran-pergeseran garis Z (fungsi tujuan)
b. Coba-coba.
   Berdasarkan cara a maka didapat titik P yang merupakan titik optimal karena sudut terjauh/teratas yang dapat di capai oleh garis tujuan.
   Titik P merupakan garis perpotongan antara garis KL dengan MN.

$$\begin{array}{l|l} 4A + 2B = 100 & \times 2 \\ 3A + 4B = 120 & \times 1 \end{array}$$

8A + **4B** = 200
3A + **4B** = 120 -
5A = 80
A = 16

4A + 2B = 100
4(16) + 2B = 100
64 + 2B = 100
2B = 36
B = 18
Jadi kombinasi produksi yang optimal
A = 16 Unit dan B = 18 Unit

Dengan demikan penerimaan maksimum
Z = 5.000A + 6.000B
= 5.000 (16) + 6.000 (18)
= 80.000 + 108.000
= Rp 188.000,-

Fungsi Biaya Gabungan

- Andaikan sebuah perusahaan memproduksi 2 barang A dan B, dimana fungsi permintaan atas kedua barang dicerminkan oleh Q_A dan Q_B sedangkan fungsi biaya $C = f(Q_A, Q_B)$
  maka:
  Penerimaan dari barang A: $R_A = Q_A \times P_A = f(Q_A)$
  Penerimaan dari barang B: $R_B = Q_B \times P_B = f(Q_B)$
  Penerimaan total: $R = R_A + R_B = f(Q_A) + f(Q_B)$
- Fungsi keuntungannya:
  $\Pi = R - C = [f(Q_A) + f(Q_B)] - f(Q_A, Q_B) = g(Q_A, Q_B)$

Fungsi Biaya Gabungan

- Keuntungan akan optimum ketika Π' = 0:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_A} = 0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial Q_B} = 0$$

- Titik optimum adalah maksimum jika Π" < 0:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_A^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_B^2} < 0$$

Contoh Soal 3 : Fungsi Biaya Gabungan

- Biaya total yg dikeluarkan sebuah perusahaan yg memproduksi dua barang, X dan Y, adalah:

  $C = Q_X^2 + 3Q_Y^2 + Q_X Q_Y$

  Harga jual per unit masing-masing barang adalah $P_X = 7$ dan $P_Y = 20$
- Berapa unit tiap barang harus diproduksi agar keuntungan maksimum?
- Berapakah besarnya keuntungan maksimum?

-

- Berapa unit tiap barang harus diproduksi agar keuntungan maksimum?

$R_X = P_X Q_X = 7Q_X \qquad R_Y = P_Y Q_Y = 20Q_Y$

$R = 7Q_X + 20Q_Y$

$\Pi = 7Q_X + 20Q_Y - Q_X^2 - 3Q_Y^2 - Q_X Q_Y$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_X} = 7 - 2Q_X - Q_Y = 0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial Q_Y} = 20 - 6Q_Y - Q_X = 0$$

$7 - 2(20 - 6Q_Y) - Q_Y = 0$

$33 - 11Q_Y = 0 \rightarrow Q_Y = 3$

$Q_Y = 3 \rightarrow 20 - 6(3) - Q_X = 0 \rightarrow Q_X = 2$

- Jika Π_{XX} dan $\Pi_{YY} < 0$ maka titik maksimum:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_X^2} = -2 < 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_Y^2} = -6 < 0$$

- Besarnya keuntungan maksimum:

$\Pi = 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2)(3)$

$\Pi = 37$